

APLICAÇÃO DE NÚMEROS FUZZY TRIANGULARES EM ANÁLISES DE INVESTIMENTOS EM SITUAÇÕES DE INCERTEZA - MÉTODO BASEADO NA TEORIA DOS JOGOS

Alexandre Ferreira de Pinho, Mestrando

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - Departamento de Produção
Pç. Pereira dos Santos, 111 apt. 5 - Centro - Itajubá - MG - CEP 37500-000 - email: afpinho@hotmail.com

Prof. Dr. José Arnaldo Barra Montevechi

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - Departamento de Produção
Cx Postal 50 - Itajubá - MG - CEP 37500-000 - Tel. (035) 629-1212 - email: arnaldo@iem.efei.rmg.br

Prof. Dr. Edson de Oliveira Pamplona

Escola Federal de Engenharia de Itajubá - Departamento de Produção
Cx Postal 50 - Itajubá - MG - CEP 37500-000 - Tel. (035) 622 1171 - email: pamplona@iem.efei.rmg.br

ABSTRACT

Several theories has been applied in decision analysis dedicated to system. In this paper a Triangle Fuzzy Number (TFN) is used into a game theory based method to investment analysis uncertainty situations. Preliminary results has show the importance of this study.

Key Words: Triangle Fuzzy Number (TFN), Investment Analysis, Game Theory

1. INTRODUÇÃO

A análise de investimentos esta sempre acompanhada de incertezas. Desse modo tem-se desenvolvido várias técnicas a fim de se avaliar a incerteza na tomada de decisões. Uma técnica muito conhecida são os métodos baseados na Teoria dos Jogos, onde se seleciona a melhor alternativa, segundo certos critérios, sem se conhecer qual o estado da natureza que se verificará no futuro.

O método consiste em representar as diversas alternativas e estados da natureza em forma de matriz, como ilustrado na figura 1. R_{ij} representa **VP**, **VA** ou **TIR** da alternativa A_i conforme o estado da natureza E_j que ocorrerá no futuro.

Alternativas / Ações	Estado da Natureza / eventos			
	E_1	E_2	...	E_n
A_1	R_{11}	R_{12}	...	R_{1n}
A_2	R_{21}	R_{12}	...	R_{21}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
A_m	R_{m1}	R_{m1}	...	R_{mn}

Figura 1 - Matriz de Resultados

Entretanto, pode ocorrer que os resultados R_{ij} podem possuir uma incerteza local, onde existe uma faixa de possibilidades que esse resultado pode variar. Desta forma aplicar a lógica fuzzy através de Números Triangulares pode ser uma boa alternativa para se atingir um resultado mais satisfatório. A inserção dos Números Fuzzy Triangulares se dá através de um especialista, que é uma pessoa experiente na área de análise de investimento que não tem possibilidade de levantar dados estatísticos, mas que é capaz de supor a faixa de variação de cada valor R_{ij} . A figura 2 mostra matriz de resultados já inserido a faixa de possibilidades, através dos números fuzzy triangulares, de cada valor R_{ij} .

Alternativas / Ações	Estado da Natureza / eventos			
	E_1	E_2	...	E_n
A_1	(a, R_{11}, b)	(c, R_{12}, d)	...	(e, R_{1n}, f)
A_2	(g, R_{21}, h)	(i, R_{22}, j)	...	(l, R_{2n}, o)
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
A_m	(p, R_{m1}, r)	(s, R_{m2}, t)	...	(u, R_{mn}, v)

Figura 2 - Matriz de Resultados com os Números Fuzzy Triangulares

A fim de tornar mais fácil o entendimento deste artigo, inicialmente se fará um comentário a respeito da matemática de Números Fuzzy Triangulares (TFN) e posteriormente será resolvido um exemplo prático desta aplicação em análise de investimentos.

2. CONSIDERAÇÃO DAS INCERTEZAS

Para considerar as incertezas e ambigüidades existentes nos problemas de engenharia, Fuzzy tem provado ser uma ferramenta efetiva para levar em consideração o impreciso (MONTEVECHI 1995). A maioria destes problemas são complexos devido ao número de variáveis envolvidas e a dificuldade de quantificação destas variáveis. Por vezes, diversas destas grandezas tem seus valores estabelecidos através de processos subjetivos.

A lógica Fuzzy é um meio de aproximar a precisão da matemática clássica e a “imprecisão” do mundo real. A teoria Fuzzy consegue manipular e operar quantidades exatas e inexatas (quantificadas através de valores lingüísticos). Existe uma grande variedade de tipos de números Fuzzy (KAUFMANN e GUPTA, 1988), entretanto neste trabalho, tratou-se de um tipo específico: **Números Fuzzy Triangulares (Triangular Fuzzy Numbers - TFNs)**.

A figura 3 representa esquematicamente um TFN, onde ao valor a_2 se atribui pertinência 1, ou seja, existe grande possibilidade de ocorrer a_2 . A valores menores que a_1 e maiores que a_3 são atribuídos pertinência zero, ou seja, não existe possibilidade de ocorrer este valores. A valores intermediários entre $[a_1, a_2]$ e $[a_2, a_3]$ são atribuídos pertinências entre 0 e 1.

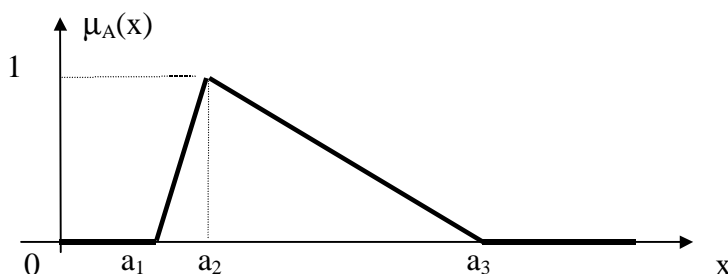


Figura 3 - Número Triangular Fuzzy - TFN

Um TFN pode ser definido como sendo $A=(a_1, a_2, a_3)$, sendo sua função pertinência, $\mu_A(x)$, definida pela expressão 1 (KAUFMANN e GUPTA, 1988).

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0, \quad x < a_1 \\ &= \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, \quad a_1 \leq x \leq a_2 \\ &= \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\ &= 0, \quad x > a_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Segundo KAUFMANN e GUPTA (1988), as operações algébricas de adição, subtração e multiplicação por um escalar, que envolvem os números fuzzy triangulares geram como resultado também um número fuzzy triangular. Essas operações são ditas como lineares. Já outras operações, tais como multiplicação e divisão entre TFNs, não necessariamente geram um número fuzzy triangular. Seu cálculo é obtido através de operações de intervalos de confiança de TFNs e requerem uma atenção especial para que a divergência gerada nestas operações não atrapalhem o resultado final esperado.

Felizmente, neste artigo somente as operações de adição, subtração e multiplicação por um escalar são necessárias para adaptar a matemática fuzzy nos cálculos da teoria dos jogos em análise de investimentos, o que torna os cálculos muito mais fáceis e simples. As operações algébricas utilizadas neste artigo são definidas e representadas graficamente a seguir.

2.1 OPERAÇÃO ALGÉBRICA DE ADIÇÃO

Seja dois TFNs A e B, com $A=(a_1, a_2, a_3)$ e $B=(b_1, b_2, b_3)$,

$$\text{então } A(+)B = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

Exemplo:

Com $A = (2, 3, 6)$ e $B = (1, 4, 5)$, então temos que $A(+)B = (3, 7, 11)$.

A representação gráfica desta operação é mostrada na figura 4.

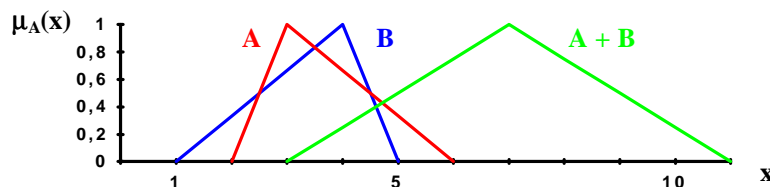


Figura 4 - Representação gráfica da operação de adição entre dois TFNs

2.2 OPERAÇÃO ALGÉBRICA DE SUBTRAÇÃO

Seja dois TFNs A e B, com $A=(a_1, a_2, a_3)$ e $B=(b_1, b_2, b_3)$,

$$\text{então } A(-)B = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1).$$

Exemplo:

Com $A = (2, 3, 6)$ e $B = (1, 4, 5)$, então temos que $A(-)B = (-3, -1, 1)$.

A representação gráfica desta operação é mostrada na figura 5.

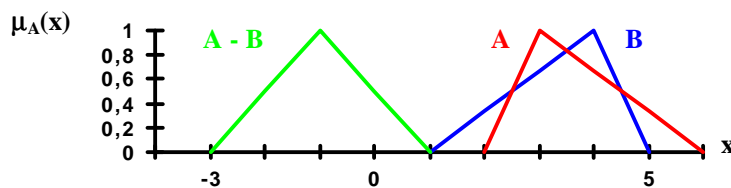


Figura 5 - Representação gráfica da operação de subtração entre dois TFNs

2.3 OPERAÇÃO ALGÉBRICA DE MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR

Seja um TFN A, com $A=(a_1, a_2, a_3)$ então

$$3(\cdot)A = 3 \cdot (a_1, a_2, a_3) = (3a_1, 3a_2, 3a_3).$$

Exemplo:

Com $A = (2, 3, 6)$, então temos que $3(\cdot)A = (6, 9, 18)$.

A representação gráfica desta operação é mostrada na figura 6.

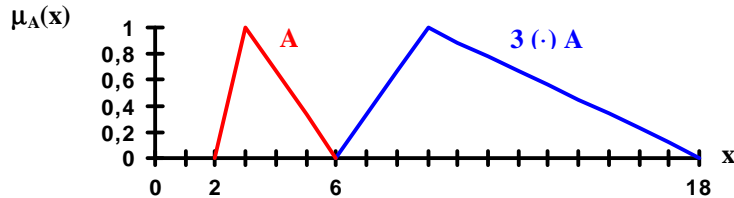


Figura 6 - Representação gráfica da operação de Multiplicação por um Escalar

2.4 COMPARAÇÃO ENTRE NÚMEROS FUZZY TRIANGULARES

A comparação entre TFNs é outro recurso utilizado no desenvolvimento deste artigo, pois é necessário, entre vários números fuzzy triangulares, definir quais são os maiores ou menores, e desta forma, estabelecer uma ordenação linear. A seguir será mostrado 3 critérios para a ordenação dos TFN segundo KAUFMANN e GUPTA (1988). Se o primeiro critério não propiciar uma única ordem linear, o segundo critério é utilizado, se este também não for suficiente, utiliza-se, então, o terceiro critério, a fim de se obter uma seqüência ordenada.

a) Primeiro critério para ordenação linear

O primeiro critério consiste em definir, para um número fuzzy triangular, um “ordinary representative”, ou seja, definir um número real que represente o número fuzzy triangular correspondente. Este número é calculado conforme a expressão (2).

$$\hat{A} = \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4} \quad (2)$$

onde $A=(a_1, a_2, a_3)$ é um TFN.

O TFN que possuir o maior \hat{A} será considerado maior.

b) Segundo critério para ordenação linear

Sendo um TFN definido com $A=(a_1, a_2, a_3)$, o segundo critério usa como parâmetro o número a_2 , cuja sua pertinência é igual a 1. O TFN que possuir maior a_2 será considerado maior, desde que possuam o mesmo valor para \hat{A} .

c) Terceiro critério para ordenação linear

Pode-se considerar que cada TFN diverge entre o seu valor a_2 , desta maneira, se dois TFN possuírem o mesmo \hat{A} e o mesmo valor de a_2 , então, será considerado maior aquele que possuir maior divergência entre o seu valor de a_2 . A divergência de um TFN é calculada fazendo-se $a_3 - a_1$.

3. APLICAÇÃO DE TFNS NA TEORIA DOS JOGOS

Aplicando-se a teoria a respeito de Números Fuzzy Triangulares nos métodos baseados na teoria do jogos para a matriz de resultados abaixo, onde A_1 , A_2 , A_3 e A_4 são alternativas que dependem do comportamento da inflação, e a inflação pode ter 3 cenários para o futuro, sendo eles:

- E_1 = a inflação aumenta no próximo ano;
- E_2 = a inflação se manterá no mesmo nível;
- E_3 = a inflação cairá.

Alternativas / Ações	Estado da Natureza / eventos		
	E1	E2	E3
A1	(80,106,110)	(55,60,65)	(17,20,25)
A2	(52,60,65)	(90,100,105)	(26,30,32)
A3	(19,20,21)	(34,40,42)	(76,80,82)
A4	(85,90,94)	(46,50,53)	(14,15,17)

Figura 7 - Matriz de Resultados

Antes de se aplicar qualquer dos métodos deve-se verificar se existem alternativas dominadas. As alternativas dominadas podem ser eliminadas da análise facilitando os cálculos. Para estabelecermos se um TFN é maior ou menor do que outro, devemos atribuir a cada TFN o seu “ordinary representative”, o que resulta na matriz de resultados da figura 8.

Alternativas / Ações	Estado da Natureza / eventos		
	E1	E2	E3
A1	100.5	60	20.5
A2	59.25	98.75	29.5
A3	20	39	79.5
A4	89.75	49.75	15.25

Figura 8 - Matriz de Resultados para os “ordinary representative”

Pela matriz da figura 6 pode-se perceber que a alternativa A_1 domina a alternativa A_4 , portanto deve-se eliminar a alternativa A_4 .

3.1 MÉTODO DE LAPLACE

No método de Laplace a probabilidade de ocorrência dos eventos é igual, e neste caso vale $1/3$.

Temos que o valor esperado (VE) para as alternativas são:

$$VE(A_1) = (80,106,110) \cdot \frac{1}{3} + (55,60,65) \cdot \frac{1}{3} + (17,20,25) \cdot \frac{1}{3} = (50.67, 62, 66.67)$$

$$VE(A_2) = (52,60,65) \cdot \frac{1}{3} + (90,100,105) \cdot \frac{1}{3} + (26,30,32) \cdot \frac{1}{3} = (56, 63.33, 67.33)$$

$$VE(A_3) = (19,20,21) \cdot \frac{1}{3} + (34,40,42) \cdot \frac{1}{3} + (76,80,82) \cdot \frac{1}{3} = (43, 46.67, 48.33)$$

Pelos critérios de comparação, pode-se afirmar qual dos Valores Esperados é maior:

Alternativas	“ordinary representative”
A ₁	60.34
A ₂	62.50
A ₃	46.17

Com isso chega-se a conclusão que a Alternativa 2 é a melhor opção.

3.2 MÉTODO MAX MIN

Utilizando os ordinários representativos já calculados na matriz da figura 8:

$$\text{Min}(A_1) = (17, 20, 25)$$

$$\text{Min}(A_2) = (26, 30, 32)$$

$$\text{Min}(A_3) = (19, 20, 21)$$

Pelos critérios de comparação, já calculados na figura 8, pode-se afirmar qual dos TFN é maior

Alternativas	“ordinary representative”
A ₁	20.5
A ₂	29.5
A ₃	20

Com isso chega-se a conclusão que a Alternativa 2 é a melhor opção.

3.3 MÉTODO MAX MAX

Utilizando os “ordinary representative” já calculados na matriz da figura 8:

$$\text{Max}(A_1) = (80, 106, 110)$$

$$\text{Max}(A_2) = (90, 100, 105)$$

$$\text{Max}(A_3) = (76, 80, 82)$$

Pelos critérios de comparação, já calculados na figura 8, pode-se afirmar qual dos TFN é maior

Alternativas	“ordinary representative”
A ₁	100.5
A ₂	98.75
A ₃	79.5

Com isso chega-se a conclusão que a Alternativa 1 é a melhor opção.

3.4 MÉTODO DE HURWICZ

Considerando um índice de pessimismo $\alpha=0.3$, teremos a seguinte situação:

$$H(A_1) = 0.3 (17, 20, 25) + 0.7 (80, 106, 110) = (61.1, 80.2, 84.5)$$

$$H(A_2) = 0.3 (26, 30, 32) + 0.7 (90, 100, 105) = (70.8, 79, 83.1)$$

$$H(A_3) = 0.3 (19, 20, 21) + 0.7 (76, 80, 82) = (58.9, 62, 63.7)$$

Pelos critérios de comparação, pode-se afirmar qual dos TFN é maior:

Alternativas	“ordinary representative”
A ₁	76.50
A ₂	77.97
A ₃	61.65

Com isso chega-se a conclusão que a alternativa 2 é a melhor.

3.5 MÉTODO DE SAVAGE

Aplicando o método de Savage na matriz de resultados da figura 7, teremos:

	E_1	E_2	E_3
A_1	$(80,106,110)-(80,106,110)$ $= (-30, 0, 30)$	$(90,100,105)-(55,60,65) =$ $(25, 40, 50)$	$(76,80,82)-(17,20,25) =$ $(51, 60, 65)$
A_2	$(80,106,110)-(52,60,65) =$ $(15, 46, 58)$	$(90,100,105)-(90,100,105)$ $= (-15, 0, 15)$	$(76,80,82)-(26,30,32) =$ $(44, 50, 56)$
A_3	$(80,106,110)-(19,20,21) =$ $(59, 86, 91)$	$(90,100,105)-(34,40,42) =$ $(48, 60, 71)$	$(76,80,82)-(76,80,82) =$ $(-6, 0, 6)$

Máximos de cada evento E_i :

$$\text{Max}(E_1) = (80, 106, 110)$$

$$\text{Max}(E_2) = (90, 100, 105)$$

$$\text{Max}(E_3) = (76, 80, 82)$$

Obtendo os máximos de cada alternativa A_i

$$\text{Max}(A_1) = (51, 60, 65)$$

$$\text{Max}(A_2) = (44, 50, 56)$$

$$\text{Max}(A_3) = (59, 86, 91)$$

$$\text{MinMax} = (44, 50, 56)$$

Portanto a melhor opção é a Alternativa 2

4. CONCLUSÃO

Este artigo representa um estudo inicial para se considerar a incerteza em análises de investimentos, significando um passo adicional para o aprimoramento dos métodos baseados na Teoria dos Jogos.

A utilização de incertezas, através de Números Fuzzy Triangulares, nos métodos apresentado neste artigo, foi realizada sem que ocorresse modificações na estrutura original de cálculos. Foi necessário apenas adaptar a matemática Fuzzy, utilizada para números triangulares, nos cálculos empregados para o desenvolvimento das análises. Números não triangulares também podem ser utilizados, por exemplo os números fuzzy trapezoidais.

Uma característica muito importante do método é que não pode ser qualquer pessoa para estimar a faixa de variações dos investimentos. Deve ser uma pessoa com bastante experiência em análise de investimentos e grande conhecimento da empresa em questão.

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] KAUFMANN, A. e GUPTA, M.M. **Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science**. Elsevier Science Publishers, Estados Unidos, 1988.
- [2] MONTEVECHI, J.A.B. e PAMPLONA, E.O. **Apostila do Curso de Engenharia Econômica Avançada II**. Itajubá - MG, 1995.

- [3] MONTEVECHI, J.A.B. **Contribuição para Identificação de Similaridades entre Peças - Abordagem Baseada na Lógica Fuzzy em Sistemas de Apoio Computadorizados - Tese de Doutorado.** São Paulo - SP, 1995.