MÓDULO 1 - PROBLEMAS DE COBERTURAS DE ARCOS E NÓS

1. CONCEITOS INICIAIS

Área contida na Pesquisa Operacional. Pode ser considerada como uma teoria baseada na interligação de pontos e linhas, utilizada principalmente na solução de problemas de roteamento.
Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) resolveu o primeiro problema (”O problema das pontes de Konigsberg”) cuja solução veio a originar a teoria dos grafos. O problema era análogo aos atuais quebra-cabeças, baseados em desenho, cujas linhas devem ser percorridas sem que se tire o lápis do papel e sem passar duas vezes sobre a mesma linha. Em 1847, o alemão, físico e matemático Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), iniciou o estudo de um certo tipo de grafo chamado árvores quando estudava problemas de circuitos elétricos. Hamilton, em 1859, estudou problemas de caminhos.

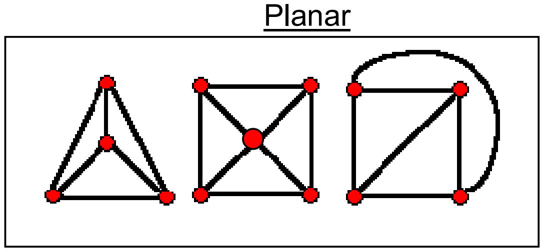
Um Grafo é definido como sendo um par ordenado (V,A). Os elementos de V são denominados vértices ou nós do grafo e os pares ordenados de A, denominados de arestas ou arcos do grafo. Alguns aspectos importantes devem ser considerados em relação aos Grafos:

- ✓ Quando um arco é incidente a um único vértice é denominado "laço".
- ✓ Dois vértices são considerados "adjacentes" se eles estão interligados por um arco.
- ✓ Uma "cadeia" é uma seqüência de arcos (orientados ou não). O tamanho de uma cadeia está relacionada ao número de arcos que a compõe.
- ✓ Um "caminho" é uma cadeia em que todos os arcos têm a mesma direção, ou seja, é um grafo com conjunto de vértices da forma {1, 2, 3, . . . , *k*–1, *k*} e conjunto de arestas da forma {{1,2} , {2,3}} , . . . , {*k*–1, *k*}}.
- ✓ Um "ciclo" é uma cadeia cujo vértice inicial e final é o mesmo (cadeia fechada), isto é, é um grafo com conjunto de vértices da forma {1, 2, 3, . . . , *k*–1, *k*} e conjunto de arestas da forma {{1,2} , {2,3}} , . . . , {*k*–1, *k*}, {*k*,1}}
- ✓ Um grafo é "conexo" quando existe um caminho entre cada par de vértices, ou se seja, se para todo par *x*, *y* de vértices existe um caminho que liga *x* a *y*; caso contrário, o grafo é desconexo.

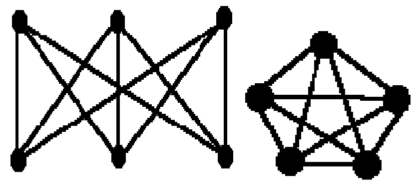
Quanto às características de seus arcos, um grafo pode ser:

1. Orientado ou não orientado: são orientados quando os seus arcos possuem uma orientação definida, e não orientados, quando não existe noção de direção. Quando os arcos não possuem direção, são denominados arestas.
2. Valorado e não valorado: é valorado quando existem valores atribuídos a cada um dos seus arcos.
3. Planar e não planar: é planar quando existe alguma forma de se dispor seus vértices em um plano, de tal modo que nenhum par de arestas se cruze. Um grafo não planar, quando projetado sobre um plano, apresenta interseções de arcos não coincidentes com um nó, em função da sua estrutura espacial.

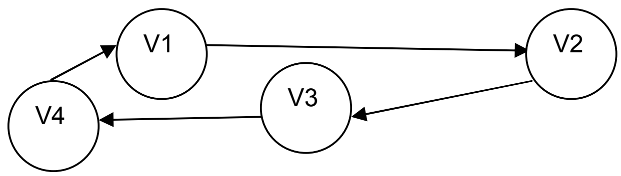
Planar



Não Planar



A figura a seguir mostra a representação gráfica de um grafo.



$$G(V,A) \Rightarrow V=\{V_1,V_2,V_3,V_4\} \text{ e } A=\{V_1V_2,V_2V_3,V_3V_4,V_4V_1\}$$

Quando em um grafo existe a associação de um ou mais valores aos arcos e/ou nós, pode-se defini-lo como uma rede.

Sendo assim, pode-se representar uma rede como R={V,A,α}, onde V e A são, respectivamente, os conjuntos de nós e arcos que formam um grafo, e α, os parâmetros associados aos elementos do conjunto A e/ou do conjunto V.

Podem-se citar alguns valores de α associados aos arcos:

- ✓ a capacidade de fluxo, que corresponde ao limite que pode passar pelo arco;
- ✓ o custo no arco, que pode ser considerado como um valor monetário, a distância percorrida ou o tempo de viagem no arco e
- ✓ o fluxo no arco.

Existem também os valores de α associados aos nós:

- ✓ população de uma cidade;
- ✓ número de produtos fabricados em uma unidade e
- ✓ demanda de produtos em uma área geográfica.

2. ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

Um problema de roteamento pode ser considerado como um conjunto organizado de meios que objetiva o atendimento de demandas localizadas nos arcos ou nos vértices de alguma rede de transporte. A idéia principal desse tipo de problema é a designação de pontos de paradas de veículos, bem como a determinação da seqüência com que esses pontos de parada são visitados, estabelecendo assim, as rotas para os veículos.

Duas abordagens básicas para o roteamento de veículos têm sido adotadas, supondo que os veículos serão roteirizados em uma rede composta por nós e arcos: problemas de coberturas de nós e problemas de cobertura de arcos.

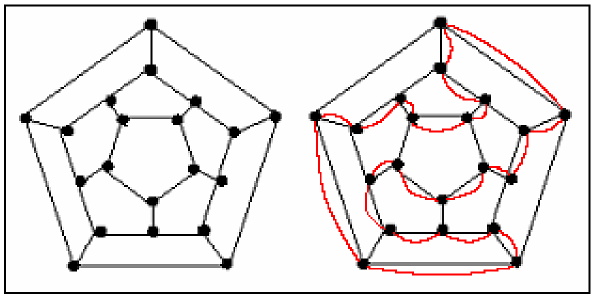
2.1. Problemas de cobertura de nós

Estes tipos de problemas devem indicar uma rota de comprimento mínimo que visite cada nó uma única vez.

2.1.1. Problema do Caixeiro Viajante

Este problema implica no cálculo de um ciclo de Hamilton, em um grafo, de encargo total mínimo. O ciclo Hamiltoniano é caracterizado pela possibilidade da existência de uma rota, que passasse pelos nós, iniciando e terminando no mesmo nó, sem nunca repetir uma passagem. Este ciclo é denominado de Hamilton em homenagem Willian Rowan Hamilton, que em 1957 propôs um jogo denominado *Around the World* (figura 1.1). O problema do Caixeiro Viajante é um problema de otimização associado ao da determinação dos caminhos hamiltonianos em um grafo qualquer.

Figura 1.1 - Esquema do tabuleiro do jogo de Hamilton



Para solução desses problemas, principalmente em redes reais de grande porte, necessita-se de apoio computacional. É importante observar que o tempo de solução computacional cresce exponencialmente com o aumento do número de nós. Somente o Método de Enumeração (identificação de todos os ciclos possíveis), garante o cálculo da solução ótima do problema, mas tal método é impraticável. Para ilustrar esta dificuldade observa-se que para um computador tratar em torno de 10.000 ciclos/segundo, ele necessitará de aproximadamente 18 segundos para finalizar a avaliação de uma solução ótima em um grafo com 10 vértices, 50 dias para um grafo com 15 vértices, 2 anos para um grafo com 16 vértices e 193.000 anos para um grafo com 20 vértices.

Serão apresentados três modelos heurísticos (utiliza experiências passadas): do vértice adjacente mais próximo, da inserção com menor encargo e da inserção com maior afastamento.

A) Método do Vértice Adjacente mais Próximo

Este método baseia-se nos seguintes passos para identificar a solução aproximada:

1-Seleciona-se arbitrariamente um nó N_i para o início do ciclo.

2-Dentre os nós não selecionados, seleciona-se o nó N_k que está a menor distância de N_i, ficando a cadeia N_i,N_k. Repetem-se esses passos até que todos os vértices possam ser utilizados.

Exemplo - Considerando a tabela a seguir que registra as distâncias em quilômetros entre os nós de um grafo orientado, determine uma rota com encargo total mínimo, utilizando o método em estudo, que passe pelos nós, iniciando e terminando no mesmo nó, sem repetir uma passagem.

	A	B	C	D	E
A		16	12	18	16
B	10		18	20	20
C	18	20		18	16
D	14	18	10		8
E	8	12	12	12	

Seleciona-se o nó inicial: A
O nó mais próximo de A que ainda não foi selecionado? C (12Km)
O nó mais próximo de C que ainda não foi selecionado? E (16Km)
O nó mais próximo de E que ainda não foi selecionado? B (12Km)
O nó mais próximo de B que ainda não foi selecionado? D (20Km)
O nó mais próximo de D que ainda não foi selecionado? A (14Km)
O circuito inicial então teria a seguinte configuração: A > C > E > B > D > A com a distância total de 74Km.

B) Método da Inserção com Menor Encargo.

Este método baseia-se nos seguintes passos para identificar a solução aproximada:

1-Seleciona-se um subciclo "i,j,i" associado a Min $\{C_{ij} + C_{ji}\}$

Obs.: se houver empate deve-se escolher arbitrariamente um subciclo.

2-No subciclo corrente, calcular para cada ligação do tipo (u,v), a inserção do nó "k" (não selecionado) a que corresponda ao aumento mínimo da distância dado por Min $\{C_{uk} + C_{kv} - C_{uv}\}$. Repetir este procedimento até serem selecionados todos os nós do grafo.

Exemplo - Considerando a tabela a seguir que registra as distâncias em quilômetros entre os nós de um grafo orientado, determine uma rota com encargo total mínimo, utilizando o método em estudo, que passe pelos nós, iniciando e terminando no mesmo nó, sem repetir uma passagem.

	A	B	C	D	E
A		16	12	18	16
B	10		18	20	20
C	18	20		18	16
D	14	18	10		8
E	8	12	12	12	

Inicialmente deve-se escolher o subciclo inicial. A tabela a seguir mostra as distâncias equivalentes de cada subciclo.

	A	B	C	D	E
A		ABA=26Km	ACA=30Km	ADA=32Km	AEA=24Km
B			BCB=38Km	BDB=38Km	BEB=32Km
C				CDC=28Km	CEC=28Km
D					**DED=20Km**
E					

Então, o primeiro subcircuito será DED com distância total de 20Km.

Agora, devem-se então verificar todas as inserções possíveis no subciclo anterior, de acordo com o passo 2.

$$D \xrightarrow{8Km} E \xrightarrow{12Km} D$$

Opções entre D e E:

D > A = 14Km e A > E = 16Km >> 14 + 16 = 30Km - 8Km = 22Km
D > B = 18Km e B > E = 20Km >> 18 + 20 = 38Km - 8Km = 30Km
D > C = 10Km e C > E = 16Km >> 10 + 16 = 26Km - 8Km = 18Km

Opções entre E e D

E > A = 8Km e A > D = 18Km >> 8 + 18 = 26Km - 12Km = $\boxed{\text{14Km}}$
E > B = 12Km e B > D = 20Km >> 12 + 20 = 32Km - 12Km = 20Km
E > C = 12Km e C > D = 18Km >> 12 + 18 = 30Km - 12Km = 18Km

A menor quilometragem na inserção foi observada com o nó A entre E e D. O novo circuito agora tem esta configuração.

$$D \xrightarrow{8Km} E \xrightarrow{8Km} A \xrightarrow{18Km} D$$

As próximas inserções possíveis são:

Opções entre D e E:

B > 18+20-8 = 30Km
C > 10+16-8 = 18Km

Opções entre E e A:

B > 12+10-8 = 14Km
C > 12+18-8 = 22Km

Opções entre A e D:

B > 16+20-18 = 18Km
C > 12+18-18 = **<u>12Km</u>**

A menor quilometragem foi observada com a inserção do nó C entre A e D, ficando o novo subciclo da seguinte forma:

D > 8Km > E > 8Km > A > 12Km > C > 18Km > D

Avaliando-se a última inserção possível (nó B), deve-se identificar em que trecho deve ser efetuado.

Opções de inserção:
D**B**EACD = 76Km
DE**B**ACD = **60Km**
DEA**B**CD = 68Km
DEAC**B**D = 68Km

Então o circuito teria a seguinte configuração por este método:

D > E > B > A > C > D com a distância total de 60Km.

C) Método da Inserção com maior afastamento.

Este método baseia-se nos seguintes passos para identificar a solução aproximada:

1-Seleciona-se o subciclo "i,j,i" associado a Max $\{C_{ij} + C_{ji}\}$
Obs.: se houver empate deve-se escolher arbitrariamente um subciclo.
2-Seleciona-se um nó "k" dos não inseridos de acordo com os subpassos a seguir:
 2.1-Avalia-se a menor distância entre os nós já pertencentes ao subciclo atual, ao nó "k" a inserir.
 2.2-Escolhe-se para inserção o nó "k" onde seja maior à distância registrada (máximo dos mínimos)
3-No subciclo atual, calcular para cada ligação do tipo (u,v) a inserção do nó "k", selecionado anteriormente, a que corresponda o aumento mínimo de distância dado por Min {Cuk+Ckv-Cuv}.
4-Selecionar novo nó até que todos estejam na solução inicial.

Exemplo - Considerando a tabela a seguir que registra as distâncias em quilômetros entre os nós de um grafo orientado, determine uma rota com encargo total mínimo, utilizando o método em estudo, que passe pelos nós, iniciando e terminando no mesmo nó, sem repetir uma passagem.

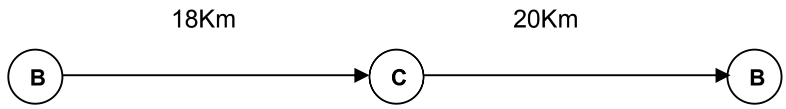
	A	B	C	D	E
A		16	12	18	16
B	10		18	20	20
C	18	20		18	16
D	14	18	10		8
E	8	12	12	12	

Inicialmente deve-se escolher o subciclo inicial. A tabela a seguir mostra as distâncias equivalentes de cada subciclo.

	A	B	C	D	E
A		ABA=26Km	ACA=30Km	ADA=32Km	AEA=24Km
B			**BCB=38Km**	BDB=38Km	BEB=32Km
C				CDC=28Km	CEC=28Km
D					DED=20Km
E					

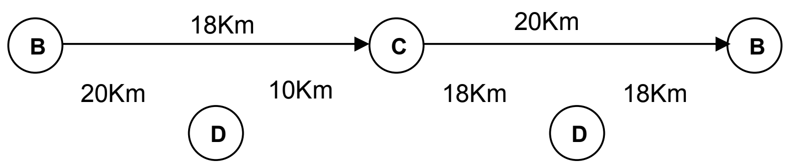
Então, o primeiro subciclo será BCB com distância total de 38Km.

Agora, devem-se então verificar todas as inserções possíveis no subciclo anterior, de acordo com o passo 2.



	Distância entre os nós		
	A	D	E
B	10	20	20
C	18	18	16
Min. entre linhas	10	18	16
Máx. entre colunas		**18**	

Opções de inserção para o nó D:

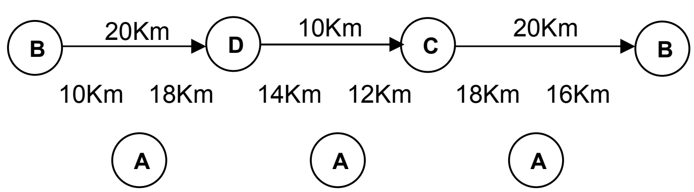


1-B > D > C = 20+10-**18 (BC)** = **12Km**
2-C > D > B = 18+18-**20 (CB)** = 16Km

O menor encargo com a inserção do nó "D" é 12Km, ficando então o novo subciclo é BDCB.

Deve-se escolher um novo nó para inserção:

	Distância entre os nós	
	A	E
B	10	20
C	18	16
D	14	8
Min. entre linhas	10	8
Máx. entre colunas	**10**	



Opções de inserção:

1-B > A > D = 10+18-**20 (BD)** = **8Km**
2-D > A > C = 14+12-**10 (DC)** = 16Km
3-C > A > B = 18+16-**20 (CB)** = 14Km

O menor encargo com a inserção do nó "A" é 8Km, ficando então o novo subciclo é BADCB.

O único nó que falta ser inserido no subciclo é o "E". Sendo assim, deve-se avaliar as opções de encargos (distâncias).

Opções de inserção:
1-B**E**ADCB = 20+8+18+10+20 = 76Km
2-BA**E**DCB = 10+16+12+10+20 = 68Km
3-BAD**E**CB = 10+18+8+12+20 = 68Km
4-BADC**E**B = 10+18+10+16+12 = 66Km

Então o circuito inicial teria a seguinte configuração por este método.

B > A > D > C > E > B com a distância total de 66Km.

BIBLIOGRAFIA

Campos, Vânia B.G., **Otimização do Transporte**, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 1998.

Smiderle, Andreia, **Técnicas da Pesquisa Operacional Aplicadas – Um Problema de Cobertura de Arcos**, Dissertação de Mestrado (Métodos Numéricos em Engenharia), Universidade Federal do Paraná, 153f., Curitiba, 2001.