

Companhia
Vale do Rio Doce



MÓDULO 5

DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL



Companhia
Vale do Rio Doce



O físico Ernest Hjalmar Walodi Weibull nasceu no dia 18 de junho de 1887 na Suécia. Ele publicou vários trabalhos na área de engenharia dos materiais, inclusive estudos sobre resistência de materiais, fadiga e ruptura em sólidos, e propriedades de esferas e de rolos.

A distribuição de probabilidade que leva seu nome foi estudada a partir de seu artigo *A Statistical Distribution Function of Wide Applicability*, publicada no *Journal of Applied Mechanics*, em 1951, baseando-se nos estudos sobre a resistência de aços.

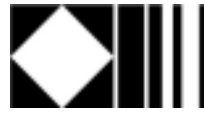


Companhia
Vale do Rio Doce



Aplica-se na Análise da Confiabilidade pois permite:

- ✓ Representar falhas típicas de partida (mortalidade infantil);
- ✓ Falhas aleatórias;
- ✓ Falhas devido ao desgaste;
- ✓ Obter parâmetros significativos da configuração das falhas;
- ✓ Representação gráfica simples.



Companhia
Vale do Rio Doce



A probabilidade de falhar um componente é dada por:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)^\beta}$$

Considerando que $t \geq t_0$ e $\beta > 0$.

A confiabilidade de um componente é dada por:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)^\beta}$$

A taxa de falhas instantânea é expressa por:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)^{\beta-1}$$



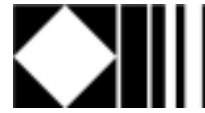
Companhia
Vale do Rio Doce



Significado dos parâmetros t_0 , β e η da Distribuição de Weibull.

t_0 - Vida Mínima ou Confiabilidade Intrínseca (tempo de operação o qual o equipamento passa a apresentar falhas, ou seja, intervalo de tempo que o equipamento não apresenta falhas).

Em muitos casos típicos de desgaste, transcorre um intervalo de tempo (t_0) significativo até que ocorram as primeiras falhas. A taxa de falhas $\lambda(t)$ só é diferente de zero e crescente após o tempo t_0 , de modo que o fator tempo nas expressões de Weibull aparece sempre sob a forma $t - t_0$.



Companhia
Vale do Rio Doce



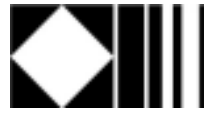
η - Vida Característica ou Parâmetro de Escala

Intervalo de tempo entre t_0 e t no qual ocorrem 63,2% das falhas, restando portanto, 36,8% de itens sem falhar.

Quando $t - t_0 = \eta$, $R(t) = e^{-1} = 0,368 = 36,8\%$.

β - Fator de Forma (indica a forma da curva e a característica das falhas).

- Quando $\beta < 1$ - mortalidade infantil.
- Quando $\beta = 1$ - falhas aleatórias (função exponencial negativa).
- Quando $\beta > 1$ - falhas por desgaste.



Companhia
Vale do Rio Doce



Outras verificações para β :

$\beta > 1$ - Pode ocorrer situações as quais as **falhas por desgaste** ocorram depois de um tempo finito livre de falhas, e um valor de “ $b = 1$ ” é obtido. Isto **pode ocorrer quando uma amostragem contém uma proporção de itens imperfeitos**, acarretando falhas antes de um tempo finito livre de falhas. Os parâmetros da Distribuição de Weibull dos modos de falhas por desgaste podem ser deduzidos se forem eliminados os itens imperfeitos e analisados os seus dados separadamente.



Companhia
Vale do Rio Doce



$\beta = 1$ - Pode ser uma indicação que os **modos de falhas múltiplos** estão presentes ou que os **dados coletados dos tempos para falhar são suspeitos**. Este é freqüentemente o caso dos sistemas os quais **diferentes componentes têm diferentes idades**, e o tempo individual de operação dos componentes não estão disponíveis. Uma taxa de falhas constante pode também indicar que as falhas são provocadas por agentes externos, tais como: uso inadequado do equipamento ou técnicas inadequadas de manutenção.



Companhia
Vale do Rio Doce



Análise de Weibull pelo Microsoft Excel

- 1 – Coletar os dados de TPF (**T**empo **P**ara **F**alhar) do componente.
- 2 – Calcular a **amplitude do ROL**:

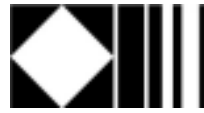
$$\mathbf{R = \text{Maior Valor Observado} - \text{Menor Valor Observado}}$$

- 3 – Calcular a quantidade de classes (Regra de Sturges):

$$\mathbf{K = 1 + 3,3 \log N,}$$

sendo N a quantidade de observações da amostra.

- 4 – Calcular a amplitude do intervalo da classe: $\mathbf{h = R / K}$
- 5 – Colocar o número de ordem, seqüencial, de cada classe, ou seja, de 1 até K , na primeira coluna de uma tabela.
- 6 – Colocar em duas colunas da planilha os limites inferior e superior de cada intervalo da classe.
- 7 – Colocar em uma terceira coluna o valor médio de cada intervalo.



Companhia
Vale do Rio Doce



- 8 – Determinar e colocar em uma quarta coluna a freqüência das classes (**Fi**). **Fi** é a quantidade de dados que estão contidos na classe.
- 9 – Calcular e colocar em uma quinta coluna a freqüência acumulada (**Fa**). **Fa** é a soma de todas as observações inferiores ao limite superior de um dado intervalo de classe.
- 10 – Calcular e colocar em uma sexta coluna a freqüência relativa simples observada (**Frso**). **Frso** é a relação entre freqüência da classe e a quantidade total de observações: **Frso (%) = Fi / N**.



Companhia
Vale do Rio Doce



11 - Calcular e colocar em uma sétima coluna a freqüência relativa acumulada observada (Frao). Frao é a relação entre a freqüência absoluta e a quantidade total de observações: **Frao (%) = Fa / N**. Neste caso, Frao será denominado F(t).

Obs.: Caso algum **F(t) seja igual a 1**, deve-se fazer $Y = 0$, senão acarretará em erro de cálculo de $Y = \text{Ln} \{ - \text{Ln} [1 - F(t)] \}$

12 – Na oitava coluna calcular os valores de Y baseando-se em $\text{Ln} \{ - \text{Ln} [1 - F(t)] \}$.

13 – Nas próximas colunas, devem-se calcular tantos valores de X quantos forem os valores estipulados de t_0 . Os valores de X são calculados por $\text{Ln}(t - t_0)$. Para cada variável independente X, com a variável dependente Y, deve-se efetuar a regressão linear para determinar os coeficientes de Weibull conforme o que segue:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)^\beta}$$

$$\text{Ln}\{-\text{Ln}[1 - F(t)]\} = \beta \cdot \text{Ln}(t) - \beta \cdot \text{Ln}(\eta)$$

$$Y = a \cdot X + b$$

$$\eta = e^{\frac{-b}{\beta}}$$



Companhia
Vale do Rio Doce



Observações

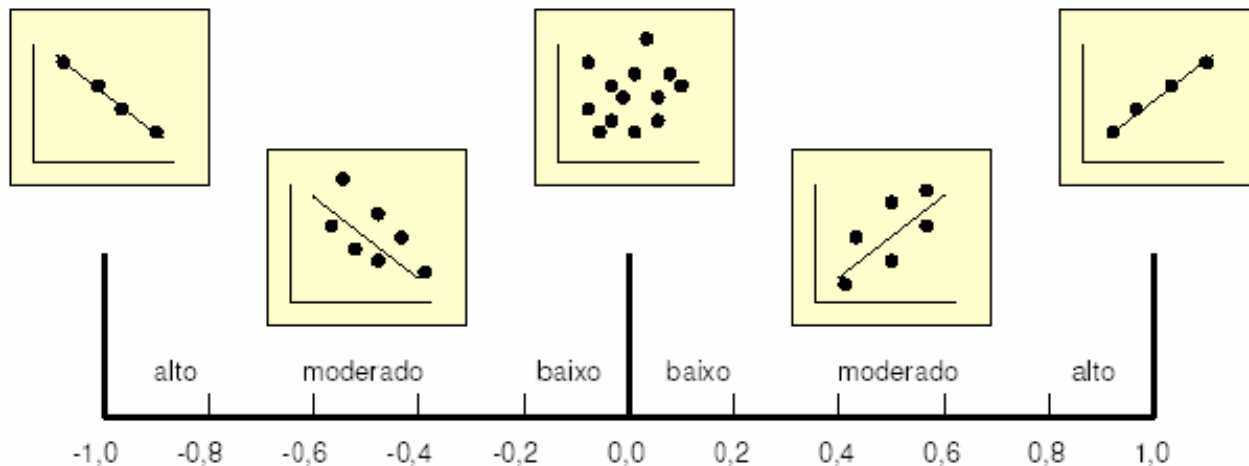
- Os coeficientes da reta de regressão (angular e linear) são:

$$a = \frac{\sum XY - n\bar{X}\bar{Y}}{(\sum X)^2 - n\bar{X}^2} \quad b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

- O maior valor de t_0 deve ser menor que o menor TPF, pois $\ln(t - t_0)$ retornaria erro caso $t = t_0$.
- Para cada t_0 , e conseqüentemente, para cada X , devem-se calcular os Coeficientes de Correlação de Pearson (r) de cada regressão. O maior r será aquele que fornecerá os parâmetros β e η da distribuição de Weibull.

- O Coeficiente de Correlação de Pearson (r) varia de -1 a 1 e é calculado por:

$$r = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{[n\sum X^2 - (\sum X)^2][n\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$





Companhia
Vale do Rio Doce



Exemplo – Baseando-se na tabela a seguir que apresenta os resultados de medidas de tempos para falhar (TPF) de um truque, em dias, calcule os parâmetros da distribuição de Weibull.

48	86	30	39	29	9	23	23	39	6
37	80	50	60	10	72	7	47	29	38
31	24	17	50	64	11	22	6	21	49
48	40	29	15	43	18	34	25	52	18
34	77	31	76	45	37	29	38	32	6



Até o item 11

Maior Valor	86
Menor Valor	6
Amplitude do ROL (R)	80
Quant. de Observações	50
Quant.de Classes (K)	6,61
Amplit.do Interv.da Classe (h)	12,11
K considerado	7
h considerado	12

Ordem	Classes			Valor Médio (t)	Fi	Fa	Frso	F(t) = Frao
	\geq		$<$					
1	\geq	6	$<$ 18	12	9	9	0,18	0,18
2		18		30	12	21	0,24	0,42
3		30		42	13	34	0,26	0,68
4		42		54	9	43	0,18	0,86
5		54		66	2	45	0,04	0,9
6		66		78	3	48	0,06	0,96
7		78		90	2	50	0,04	1



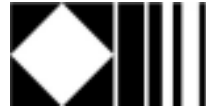
hnia
Rio Doce



Até parte do item 13

$t_0(1)$	0
$t_0(2)$	1
$t_0(3)$	2
$t_0(4)$	3
$t_0(5)$	4
$t_0(6)$	5

Y	Valores de X						
	Ln (t-t ₀ 1)	Ln (t-t ₀ 2)	Ln (t-t ₀ 3)	Ln (t-t ₀ 4)	Ln (t-t ₀ 5)	Ln (t-t ₀ 6)	
-1,617	2,485	2,398	2,303	2,197	2,079	1,946	
-0,607	3,178	3,135	3,091	3,045	2,996	2,944	
0,131	3,584	3,555	3,526	3,497	3,466	3,434	
0,676	3,871	3,850	3,829	3,807	3,784	3,761	
0,834	4,094	4,078	4,060	4,043	4,025	4,007	
1,169	4,277	4,263	4,248	4,234	4,220	4,205	
0,000	4,431	4,419	4,407	4,394	4,382	4,369	
Σ	0,585	25,920	25,698	25,464	25,217	24,952	24,667



Companhia
Vale do Rio Doce



Até parte do item 13

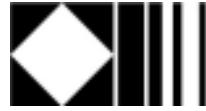
Dados para o Cálculo da Regressão													
Y^2	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_5^2	X_6^2	X_1Y	X_2Y	X_3Y	X_4Y	X_5Y	X_6Y	
2,615	6,175	5,750	5,302	4,828	4,324	3,787	-4,019	-3,878	-3,724	-3,553	-3,363	-3,147	
0,369	10,100	9,831	9,555	9,269	8,974	8,670	-1,931	-1,905	-1,878	-1,849	-1,820	-1,789	
0,017	12,842	12,640	12,435	12,226	12,011	11,792	0,468	0,464	0,460	0,456	0,452	0,448	
0,457	14,986	14,824	14,658	14,491	14,320	14,147	2,617	2,603	2,588	2,574	2,558	2,543	
0,696	16,764	16,626	16,487	16,346	16,203	16,059	3,415	3,401	3,387	3,372	3,357	3,342	
1,367	18,290	18,170	18,050	17,928	17,804	17,679	5,000	4,983	4,967	4,950	4,933	4,915	
0,000	19,632	19,526	19,419	19,311	19,202	19,092	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
5,521	98,788	97,368	95,906	94,398	92,840	91,225	5,550	5,668	5,800	5,949	6,118	6,313	
							Σ						



Companhia
Vale do Rio Doce



Resultados das Regressões				
	β (a - coef. angular)	b (coef.linear)	η	r
X_1	1,203	-4,369	37,837	0,862
X_2	1,163	-4,186	36,572	0,865
X_3	1,122	-3,997	35,278	0,868
X_4	1,079	-3,805	33,952	0,870
X_5	1,034	-3,605	32,584	0,873
X_6	0,988	-3,399	31,165	0,876



Companhia
Vale do Rio Doce



Bergamo Filho, Valentino. **Confiabilidade Básica e Prática**, 108 pgs, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1997.

Branco Filho, Gil. **Confiabilidade Aplicada a Manutenção**, Comprove Engenharia, Minas Gerais, 1995.

Lafraia, João Ricardo Barusso. **Manual de Confiabilidade, Manutenibilidade e Disponibilidade**. 374 pgs, Editora Qualitymark, ISBN 85-7303-294-4, Rio de Janeiro, 2001.

Scapin, Carlos Alberto. **Análise Sistêmica de Falhas**. 131 pgs, Editora de Desenvolvimento Gerencial, ISBN 85-86948-18-7, Belo Horizonte, 1999.

Seixas, Eduardo, **Confiabilidade e Manutenibilidade**, Qualytek, Rio de Janeiro, 2001.